සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
*All Rights Reserved*]

18277

**ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka**

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

**(01) ශුද්ධ ගණිතය I**
(01) Pure Mathematics I

| 01 | |
|---|---|
| S | I |

පැ. තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $\dfrac{4}{2.3.4} + \dfrac{7}{3.4.5} + \dots + \dfrac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \dots$

ශ්‍රේණියේ මුල් පද $n$ හි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඉහත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, අනන්තය තෙක් ඓක්‍යය සොයන්න.

(ii) ඕනෑ ම $n$ ධන නිඛිලයක්, $5m$, $5m \pm 1$, $5m \pm 2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි $m$ යනු නිඛිලයකි. එ නයින්, $n^2$ ආකාරයේ ඕනෑ ම නිඛිලයක් 5 න් බෙදූ විට ශේෂය 0, 1, 4 අතුරින් එකක් වන බව අපෝහනය කරන්න.

2. (අ) $x, y \neq 0$ වන පරිදි වූ $x, y, \lambda, \mu$ තාත්ත්වික රාශි,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, \quad x + y = \lambda, \quad \frac{y}{x} = \mu$$

සම්බන්ධතා මඟින් සැබඳේ.

$\lambda$ සහ $\mu$ අතර සම්බන්ධතාවක් ලබා ගෙන, $\mu$ තාත්ත්වික වන පරිදි වූ $\lambda$ හි අගය කුලකය සොයන්න.

එ නයින්, $\lambda = 3$ විට, $\dfrac{y}{x}$ නිර්ණය කරන්න.

(ආ) $x, a, b > 0$, $a > b$ සහ $x^2 > ab$ විට,

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} > 0$$

බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $|2x - 1| < 3x + 5$

වන පරිදි වූ $x$ හි අගයන්ගෙන් සමන්විත කුලකය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (i) $t = x + \frac{1}{x}$ යයි ලියමින් $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සියල්ල ම සොයන්න.

(ii) $E = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$ යයි ගනිමු. $y^2 + y + a$ ආකාරයෙන් $E$ ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි $a$ නියතයක් ද $y$ යන්න $b$ හා $c$ නියතයන් වන $x^2 + bx + c$ ආකාරයෙන් ද වේ. එ නයින් සියලු ම තාත්ත්වික $x$ සඳහා $E \geqslant 3$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \frac{k}{x-2} + \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ වන සේ $k$ නියතයක් සහ $x$ හි ශ්‍රිතයක් වන $f$ සොයන්න. $(x-1)$ හි බහුපදයක් ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න. එ නයින් $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}$ හි භින්න භාග සොයන්න.

4. නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
$z \neq 1$ විට,

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} \equiv \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 0$ විට, ඉහත සර්වසාම්‍යයේ දකුණු පැත්ත

$$\frac{z^{-1} - (n+1)z^{n-1} + nz^n}{z^{-1} + z - 2}$$

ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

එ නයින්, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස ගැනීමෙන් හා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, $\theta$ හි අගය $2\pi$ හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නොවන විට,

$$1 + \sum_{r=2}^{n} r\cos(r-1)\theta = \frac{(n+1)\cos(n-1)\theta - n\cos n\theta - \cos\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

බව පෙන්වන්න.

5. ආර්ගන් රූ සටහනෙහි, $z$ සහ $z'$ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් $P$ සහ $P'$ මගින් ද $z - z'$ සංඛ්‍යාව $Q$ මගින් ද නිරූපණය වන්නේ නම්, $OQ$ යන්න $P'P$ ට සමාන හා සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

$B$ සහ $C$ හි කෝණ එක එකක් $\frac{\pi - \alpha}{2}$ වන සේ වූ $ABC$ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක $A$, $B$, $C$ ශීර්ෂ මගින් පිළිවෙලින් $z_1, z_2, z_3$ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ.

$$(z_3 - z_2)^2 = 4(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

බව සාධනය කරන්න.

6. එකිනෙකට වෙනස් පොත් දහයක් (කොළ පාට හතරක්, නිල් පාට හතරක් සහ රතු පාට දෙකක්) රාක්කයක් මත පිළියෙල කර ඇත. එක එක් අවස්ථාවේ දී සියලු ම ආගණන කාර්යය පැහැදිලි ලෙස දක්වමින්

(i) පාට සහ අනුපිළිවෙල නොසලකා හරි නම්
(ii) එක ම පාටින් යුත් පොත් සැම විට ම එක ළඟ තබා ඇත්නම්
(iii) එක ම පාටින් යුත් පොත් සැම විට ම එක ළඟ එක ම අනුපිළිවෙලට තබා ඇත් නම්
(iv) කොළ පාට පොත් සැම විට ම එක ළඟ එක ම අනුපිළිවෙලට සිටින සේ ද රතු පාට පොත් සැම විට ම වෙන් වෙන් ව සිටින සේ ද තබා ඇත් නම්

රාක්කය මත පොත් පිළියෙල කළ හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

7. $n$ ධන නිඛිලයක් විට, සුපුරුදු අංකනයකින්,

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + \dots + {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r + \dots + x^n$$

බව සාධනය කරන්න.

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$$ හි ප්‍රසාරණයේ $x$ හි සංගුණකය සොයන්න.

$(1 - x^2)^n = (1 - x)^n (1 + x)^n$ හි දෙපැත්ත ම ප්‍රසාරණය කර,

$C_o\, C_r - C_1\, C_{r-1} + C_2\, C_{r-2} + \dots + (-1)^r\, C_r\, C_o = 0$, $r$ ඔත්තේ විට

$= (-1)^{\frac{r}{2}}\, C_{\frac{r}{2}}$, $r$ ඉරට්ටේ විට

බව පෙන්වන්න ; මෙහි $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2\, x^2 + C_3\, x^3 + \dots + C_n\, x^n$

8. (i) $f$ යනු $x$ හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් ද $f(x) > 0$ ද නම්, $x$ විෂයයෙන් $\sqrt{f(x)}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමූලධර්ම වලින් ලබා ගන්න.

(ii) $x$ විෂයයෙන් $\tan^{-1} x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.
$x = \tan\theta$ යයි ගැනීමෙන් හා $x$ විෂයයෙන් $\tan^{-1} x$ හි ව්‍යුත්පන්නය උපයෝගී කර ගනිමින් $x$ විෂයයෙන්

$\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$ සහ $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නයන් සොයන්න.

$\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$ විෂයයෙන් $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

(iii) $y = \{\sin^{-1} x\}^2$ නම් $(1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න.

$(1 - x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\,\frac{dy}{dx} = 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

9. (අ) $a > 0$ නම්, $\frac{d}{dx}(a^x)$ ලබා ගෙන,

$c$ නියතයක් විට, $\int_0^c \frac{a^x}{a^x + 1}\, dx$ අගයන්න.

$0 \leqslant c \leqslant \frac{\pi}{2}$ විට,

$$I = \int_{-c}^{c} \frac{\cos x\, dx}{1 + a^x} \quad \text{සහ}$$

$$J = \int_{-c}^{c} \frac{a^x \cos x\, dx}{1 + a^x} \quad \text{නම්,}$$

(i) $t = -x$ ආදේශය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $I = J$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $I + J$ ලබා ගන්න.

එ නයින් $c = \frac{\pi}{6}$ විට $J$ හි අගය ලියන්න.

(ආ) $\int_0^1 \frac{dx}{(2 + x)^{\frac{1}{2}}\,(2 - x)^{\frac{3}{2}}}$ අගයන්න.

[ අනෙක් පිට බලන්න.

10. (i) $-1 < x < 1$ විට, $\ln(1 + x)$ සඳහා මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.

$$\ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + \dots\right)$$

බව පෙන්වා, $y > 0$ විට,

$$\ln y = 2\left\{\frac{y - 1}{y + 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y - 1}{y + 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y - 1}{y + 1}\right)^5 + \dots\right\}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

$\ln 2$ සඳහා ශ්‍රේණියේ මුල් පද 3 ලියා, එහි අගය සාර්ථාංක 3 කට අගයන්න.

(ii) සිම්සන් නීතිය සඳහන් කරන්න.

$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලබා ගැනීම පිණිස, කෝටික පහක් ගෙන එම නියමය යොදන්න.

11. $C$ වක්‍රයක්,

$$x = \frac{at^3}{t - 1},\ y = \frac{a(t^2 - 3)}{t - 1},\ t \geqslant 0\ (t \neq 1)$$ පරාමිතික සමීකරණවලින් ගෙන දේ.

(i) $\frac{3}{2}$ හරහා $t$ වැඩි වන විට, $\frac{dx}{dt}$ හි ලකුණ වෙනස් වන බව ද,

(ii) සියලු ම $t$ සඳහා, $\frac{dy}{dt}$ එක ම ලකුණ ගන්නා බව ද

පෙන්වන්න.

$t \geqslant 0\ (t \neq 1)$ සඳහා, එක ම රූප සටහනෙහි, $t$ ට ඉදිරි ව $x$ ද $t$ ට ඉදිරි ව $y$ ද වක්‍රවල කටු සටහන් අඳින්න. එ නයින්, $C$ වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ නම්,

$y = f(x)$ සහ $y = \frac{1}{f(x)}$ වක්‍රවල කටු සටහන් එක ම රූප සටහනෙහි අඳින්න. ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ඇතොත් ඒවායේ ඛණ්ඩාංක සඳහන් කරන්න.

(i) ඉහත වක්‍ර දෙකින් අන්තර්ගත වන $R$ පරිමිත පෙදෙසේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

(ii) $R$ පෙදෙස $y$ අක්ෂය වටා $\pi$ රේඩියන් හරහා භ්‍රමණය වීමෙන් ලැබෙන පරිභ්‍රමණ ඝනයේ පරිමාව නිර්ණය කරන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

18277

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1992 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1992

(01) ශුද්ධ ගණිතය II
(01) Pure Mathematics II

| 01 | |
|---|---|
| S | II |

පැ තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $OAB$, $OCD$ සරල රේඛා දෙක $A, B, D, C$ ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තයක් ඡේදනය කරයි. මෙහි $O$, බාහිර ව පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $X$ හිදී දික් කළ $DA$ හමු වන සේ $CB$ ට සමාන්තර ව $O$ හරහා රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. $OX^2 = AX \cdot DX$ බව සාධනය කරන්න.

   (ii) $O$ යනු $ABC$ ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි. $AO$, $BO$, $CO$ රේඛා $BC$, $CA$, $AB$ පිළිවෙලින් $D, E, F$ හිදී හමු වේ නම්,

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$$

   බව සාධනය කරන්න.

   $ABC$ යනු $B$ හිදී සෘජු කෝණයක් සාදන ත්‍රිකෝණයකි. $B$ සිට $AC$ ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය $L$ ද, $L$ සිට $BC$ සහ $AB$ ට ඇඳි ලම්බවල අඩි පිළිවෙළින් $M$ සහ $N$ ද වේ. $AM$ සහ $CN$ රේඛා $O$ හි දී හමු වන්නේ ද $BO$ රේඛාව $P$ හිදී $AC$ හමු වන්නේ ද නම්,

   (i) $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$

   (ii) $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AB^4}{BC^4}$

   බව සාධනය කරන්න.

2. (i) සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ ඒකලක්ෂ්‍ය බව ද එකිනෙක සමච්ඡේදනය කරන බව ද පෙන්වන්න.

   (ii) $OABC$ චතුස්තලයක $OA$, $OB$, $OC$ දාර එකිනෙකට ලම්බ වන අතර පිළිවෙලින් $a$, $b$, $c$ ට සමාන වේ. $OAB$ මුහුණතට $ABC$ මුහුණතේ ආනතිය

$$\tan^{-1}\left(\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right)$$

   බව පෙන්වන්න.

   $ABCDD'C'B'A'$ සෘජුකෝණාස්‍ර සමාන්තරාස්‍රයක $A'B'C'D'$ මුහුණත $ABCD$ මුහුණතට සමාන්තර වන අතර $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ දාර $ABCD$ මුහුණතට ලම්බ වේ. $P, Q, R$ යනු පිළිවෙළින් $AB$, $BD'$, $DD'$ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

   $AA' = a$ ද $AB = b$ ද $AD = c$ ද නම් $ABCD$ මුහුණත සමඟ $PQR$ තලය සාදන කෝණය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. $P$ ලක්ෂ්‍යයක දී ඡේදනය වන $l_1, l_2$ සරල රේඛා පිළිවෙළින් $ax + by + c = 0$ සහ $a'x + b'y + c' = 0$ සමීකරණවලින් නිරූපණය වේ. $\lambda$ පරාමිතියක් වන විට,

$$ax + by + c + \lambda (a'x + b'y + c') = 0$$

සමීකරණය විවරණය කරන්න.

$l_1, l_2$ ට සමාන්තර ව $O$ මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා වූ සරල රේඛා පිළිවෙළින් $Q$ සහ $R$ හිදී $l_2, l_1$ ඡේදනය කරයි. $OQPR$ සමාන්තරාස්‍රයේ $OP, QR$ විකර්ණවල සමීකරණ සොයන්න. $(c, c' \neq 0)$
එනයින්,

(i) $OQPR$ රොම්බසයක් වීම සඳහාත්

(ii) $OQPR$ සමචතුරස්‍රයක් වීම සඳහාත්

$a, b, c, a', b', c'$ නියත මගින් සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතා නිර්ණය කරන්න.

4. (අ) $(r, \theta)$ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සිට කාටීසියානු ඛණ්ඩාංකවලට හැරවීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$\frac{2a}{r} = \cos\theta + 2\sin\theta \qquad (a > 0)$$

මගින් $l$ සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

එක ම සටහනෙහි, $l$ හිත් $C : r = a(1 + \cos\theta)$ වක්‍රයේත් කටු සටහන් ඇඳ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සඳහන් කරන්න.

(ආ) $y = x^2 - 1$ වක්‍රයේ කටු සටහනක් ඇඳ එනයින්, $y = |x^2 - 1|$ හි කටු සටහනක් වෙන ම රූ සටහනක අඳින්න.

එක ම දළ රූ සටහනක $y = |x^2 - 1|$ සහ $y = |x^2 - 7|$ වක්‍ර ඇඳීමෙන්,

$$|x^2 - 7| > y > |x^2 - 1|$$

සපුරාලන පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

5. (i) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය සහ $l \equiv px + qy + r$ සරල රේඛාව $A$ සහ $B$ හිදී එකිනෙක ඡේදනය කරයි. $\lambda$ පරාමිතියක් විට, $S + \lambda l = 0$ සමීකරණය විවරණය කරන්න.

$$S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 2y - 17 = 0 \quad \text{සහ} \quad l \equiv x - y + 2 = 0$$

විට, $AB$ විෂ්කම්භය ලෙස ඇති $S'$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

$S'$ වෘත්තයත් $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ වෘත්තයත් බාහිර ව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

(ii) $S$ වෘත්තය $(2, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අතර $S' : x^2 + y^2 = 1$ වෘත්තය මත පිහිටි විෂ්කම්භාභිමුඛ ලක්ෂ්‍යවල දී $S'$ ඡේදනය කෙරේ. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ වෘත්තය සහ $S$ වෘත්තය සෘජුකෝණී ලෙස ඡේදනය වේ නම්, $S$ හි සමීකරණය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයා පරාවලයේ නාභියේ සිට ස්පර්ශකයට අඳින ලද ලම්බයේ අඩිය සැම විට ම $y$ – අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$l_1, l_2, l_3$ වනාහි පරාවලයකට ඇඳි ස්පර්ශක තුනකි. ඉහත ප්‍රතිඵලය යොද ගෙන ජ්‍යාමිතික ක්‍රමයකින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $l_1, l_2, l_3$ මගින් සැදෙන ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ හරහා වූ වෘත්තය, පරාවලයේ නාභිය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

7. එය මත පිහිටි $(x_1, y_1)$ ලක්ෂ්‍යයක දී $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය,

$$a^2y_1\, x - b^2x_1\, y + (b^2 - a^2)\, x_1y_1 = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$$(a^2 - b^2)^2\, l^2\, m^2 - (b^2\, l^2 + a^2\, m^2)\, n^2 = 0$$

වන්නේ නම්, $lx + my + n = 0$ රේඛාව ඉලිප්සයට අභිලම්බයක් වන බව සාධනය කර අභිලම්බය වක්‍රය කපන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ප්‍රථම ඉලිප්සය, එහි කේන්ද්‍රය වටා සෘජු කෝණයකින් ස්වකීය තලයේ භ්‍රමණය කිරීමෙන් දෙවැනි ඉලිප්සයක් ලැබේ. ඉලිප්ස දෙකට ම පොදු වූ අභිලම්බවල සමීකරණ සොයන්න.

8. $P$ ලක්ෂ්‍යයක සිට $x + y = \sqrt{2}$ සරල රේඛාවට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය $Q$ ද $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ඛණ්ඩාංක සහිත ලක්ෂ්‍යය $S$ ද වේ.

$SP^2 = 2\ QP^2$ වන පරිදි $P$ විචලනය වන්නේ නම්, එහි පථය කවරෙක් ද යන වග හඳුන්වා දෙන්න.

$xy = 1$ බහුවලයට $\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම ස්පර්ශකය $x$ අක්ෂය $A$ හිදී ද $y$ අක්ෂය $B$ හිදී ද ඡේදනය කරනු ලැබේ. $C$ යනු $AC : CB = a : b$ වන පරිදි $AB$ මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යි. $t$ විචලනය වන විට, $C$ හි පථයේ සමීකරණය සොයන්න.

$x + y = \sqrt{2}$ සරල රේඛාව $C$ හි පථයට ස්පර්ශකයක් වන සේ $a : b$ අනුපාතයට ගත හැකි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

9. ඕනෑ ම $ABC$ ත්‍රිකෝණයක් සඳහා, සුපුරුදු අංකනයකින්,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

බව සාධනය කරන්න.

$D$ යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි ත්‍රිකෝණයේ $BC$ පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

$B\hat{A}D = \alpha$, $C\hat{A}D = \beta$ සහ $C\hat{D}A = \theta$ නම්,

$$\begin{aligned}(m + n)\cot\theta &= m\cot\alpha - n\cot\beta \\ &= n\cot B - m\cot C\end{aligned}$$

බව සාධනය කරන්න.

$F$ යනු $AB$ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද $L$ යනු $A$ ශීර්ෂයේ සිට $BC$ පාදයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය ද වේ. $P$ හිදී $CF$ සහ $AL$ ඡේදනය වේ.

$$\tan A\hat{P}F = \frac{2 - \cot B\,(\cot A - \cot B)}{\cot A + \cot B}$$

බව සාධනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) $\cos(A+B)$ සඳහා සම්මත සූත්‍රය යොදා, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ බව පෙන්වන්න.

$\cos 2\theta \tan\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

$2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කර එ නයින්,

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

බව පෙන්වන්න.

$\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ බව අපෝහනය කර $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ සඳහා අගයක් ලබා ගන්න.

(ආ) $\tan(A-B) \equiv \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කරන්න.

$x$ සඳහා, පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $\tan x - \tan(x-\alpha) = \tan\alpha, \quad \alpha \neq 0$

(ii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(2x) = \dfrac{\pi}{4}$

11. $X$ සහ $Y$ විචල්‍ය $Y = \dfrac{X-a}{b}$ වන පරිදි වේ ; මෙහි $a$ සහ $b$ ඥාත නියත වේ.

$\overline{X} = a + b\,\overline{Y}$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි "$\overline{\phantom{x}}$" යන්නෙන් සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය හැඳින්වේ.

$A$ ගමකින් හා $B$ ගමකින් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් පවුල් 98 ක මාසික ආදයම පහත දක්වෙන වගුවෙන් ගෙන දේ.

| රු. 100 යේ ඒකකවලින් මාසික ආදයම | පවුල් සංඛ්‍යාව | |
|---|---|---|
| | A ගම | B ගම |
| 5—10 | 1 | 5 |
| 10—15 | 10 | 6 |
| 15—20 | 20 | 15 |
| 20—25 | 8 | 10 |
| 25—30 | 6 | 5 |
| 30—35 | 3 | 4 |
| 35—40 | 1 | 2 |
| 40—45 | 0 | 2 |

එක් එක් ගමක් සඳහා මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යකය සහ මාතය සොයා ඔබේ ප්‍රතිඵල ගැන විවේචනයක් කරන්න.

12. $A$, $B$ ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනෙකු ටෙනිස් තරඟයක යෙදේ. ඔවුන් අතරෙන් කෙනෙකු ක්‍රීඩා වාර (sets) දෙකක් දිනන තෙක් තරඟය පැවැත්වේ. ඕනෑ ම ක්‍රීඩා වාරයක් $A$ දිනීමේ සම්භාවිතාව 0.40 වේ.

(අ) (i) $A$ තරඟය දිනීමේ

(ii) අනුගාමී ක්‍රීඩා වාර දෙකකින් $B$ පරාජය කිරීමෙන් $A$ තරඟය දිනීමේ

සම්භාවිතාවන් සොයන්න.

(ආ) තරඟයේ දී ක්‍රීඩා කෙරුනු ක්‍රීඩා වාර ගණන $X$ සසම්භාවී විචල්‍යයෙන් හැඳින්වේ නම්, $X$ හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයා, එනයින් තරඟයක දී ක්‍රීඩා කෙරෙන අපේක්ෂිත ක්‍රීඩා වාර ගණන ($X$ හි මධ්‍යන්‍යය) සොයන්න.

(ඇ) එක් ක්‍රීඩා වාරයකට පැය එකහමාරක කාලයක් ගත වන අතර, ක්‍රීඩා සංගමය මගින් සපයන පහසුකම් සඳහා සංවිධායක කමිටුව පැයකට රු. 1000/= ක් ගෙවිය යුතු ය. තරඟය සඳහා වැය වන මුදල $Y$ සසම්භාවී විචල්‍යයෙන් දක්වේ නම් $Y$ හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයා, එනයින් අපේක්ෂිත වියදම ($Y$ හි මධ්‍යන්‍යය) සොයන්න.